Meccanica Lagrangiana

Dinamica Di Una Trottola Pesante

Esame di Analytical Dynamics

PhD Student: Dott. Ing. *Ilario De Vincenzo*
Docente: Prof. Dott. *Giuseppe Florio*
Tutor: Prof. Ing. *Giuseppe Carbone*

Bari, 29 Luglio 2014

Sommario

- Richiami di Meccanica Razionale
- Principio dei Lavori Virtuali
- Principio di D' Alembert
- Equazione Simbolica della Dinamica
- Equazioni di Lagrange
- Teorema di Noether
- Richiami di Cinematica e Dinamica dei Corpi Rigidi nello spazio
- Moti di Precessione
- Equazioni di Eulero
- Precessioni per Inerzia – Moti alla Poinsot
- Angoli di Eulero
- Dinamica di una trottola pesante

Richiami di Meccanica Razionale

Consideriamo un sistema di n punti materiali

Un **vincolo** è una funzione che mette in relazione le coordinare dei singoli punti con le loro velocità. In generale anche la «funzione vincolare» dipende dal tempo.

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x_1}, \dot{y_1}, \dot{z_1}, \dots, \dot{x_n}, \dot{y_n}, \dot{z_n}, t) \geq 0$$

Classificazione vincoli:

- **Unilateri**: $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x_1}, \dot{y_1}, \dot{z_1}, \dots, \dot{x_n}, \dot{y_n}, \dot{z_n}, t) \lesseqgtr 0$
- **Bilateri**: $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x_1}, \dot{y_1}, \dot{z_1}, \dots, \dot{x_n}, \dot{y_n}, \dot{z_n}, t) = 0$
- **Olonomi**: $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \geq 0$ (La funzione vincolare non dipende dalle velocità o quando tale dipendenza è eliminabile.

n punti materiali nello spazio $\Longrightarrow 3n$ gradi di libertà $\Longrightarrow m$ **parametri liberi o «lagrangiani»**: $q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)$

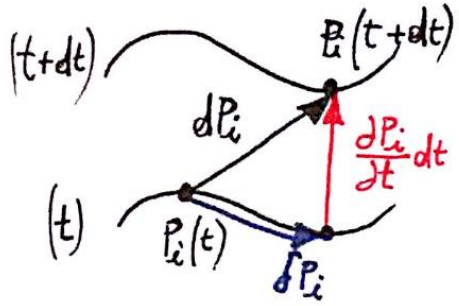
vincoli

Ognuno degli n punti materiali del sistema sarà funzione vettoriale degli m Parametri lagrangiani e del tempo:

$$\boxed{P_i = P_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t), t) \qquad i = 1,2, \dots, n}$$

Si definisce **Configurazione** del sistema di punti materiali la m-upla nella quale viene associato ad ogni parametro lagrangiano un valore.

Poniamoci nel caso più generale di vincolo mobile, lo **spostamento reale infinitesimo** di un punto P_i si scrive come:



$$dP_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k}_{\text{Spostamento dovuto ai parametri lagrangiani}} + \underbrace{\frac{\partial P_i}{\partial t} dt}_{\text{Spostamento dovuto alla mobilità del vincolo nel tempo}} \quad i = 1,2,\dots,n$$

Si definisce **spostamento virtuale infinitesimo** lo spostamento del singolo punto a vincoli fermi (è come se congelassimo il sistema):

$$\delta P_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad i = 1,2,\dots,n$$

OSSERVAZIONE: Quando il vincolo reale è fisso $dP_i \equiv \delta P_i$ ma concettualmente mantengono un differente significato:

Lo spostamento virtuale è solo compatibile con i vincoli ma non è detto che si verifichi, mentre quello reale si verifica in base alla reale configurazione di carico.

A partire da queste definizioni si definisce:

- **Velocità reale**:

$$v_i = \frac{dP_i}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial P_i}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad i = 1,2,\dots,n$$

- **Velocità virtuale**:

$$\tilde{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \tilde{\dot{q}}_k \quad i = 1,2,\dots,n$$

Consideriamo un sistema OLONOMO, o comunque integrabile, e calcoliamo il **lavoro virtuale infinitesimo** compiuto dalle forze agenti sul sistema:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Risultante delle forze sul punto i Derivata direzionale lungo q_k

Scambio le sommatorie:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

$$\delta L = \sum_{k=1}^{m} Q_k \, \delta q_k$$

E' possibile esprimere il lavoro virtuale come somma dei prodotti di ogni «**componente**» Q_k per il relativo spostamento virtuale.

Q=(Q_1, Q_2,…, Q_n) è un vettore contenente le **componenti lagrangiane delle forze**: somma sugli n punti delle proiezioni lungo la direzione data dalla derivata direzionale $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ della risultante delle forze applicata in ogni punto.

$$\boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}}$$

Se le forze sono conservative $\overline{F_i} = -\nabla_i U_i$ e se il sistema è olonomo, per cui U=(q_1, q_2,…, q_m, t) :

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} -(\nabla_i U_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$$